

[P10] Differentialformen

Betrachten Sie die Mannigfaltigkeit $\Omega = \{(T, V) \in \mathbb{R}^2 \mid T, V > 0\}$ sowie die Funktion

$$p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(T, V) = \alpha \frac{T}{V}, \quad (1)$$

wobei $\alpha > 0$ eine Konstante ist. Sei $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wir möchten U in den beiden Koordinatensystemen (T, V) und (T, p) auf Ω untersuchen, also $U(T, V)$ und $\tilde{U}(T, p) := U(T, V(T, p))$, wobei wir im weiteren $\tilde{U} = U$ schreiben.

- Drücken Sie die Differentialformen dT und dV in den Koordinaten (T, p) aus, also in der Form $F_1 dT + F_2 dp$, wobei F_1 und F_2 Funktionen von T und p sind.
- Schreiben Sie die partiellen Ableitungen $(\partial U / \partial T)_V$ und $(\partial U / \partial V)_T$ in den Koordinaten (T, p) , also als Kombinationen von $(\partial U / \partial T)_p$ und $(\partial U / \partial p)_T$ sowie Funktionen von T und p .
- Schreiben Sie die Differentialform $\delta Q := dU + p dV$ in beiden Koordinatensystemen.

[P11] Teilchenerzeugung

Betrachten Sie Teilchen, die frei erzeugt und vernichtet werden. Jedes existierende Teilchen habe eine Masse M , eine Ruheenergie Mc^2 sowie eine (nicht-relativistische) kinetische Energie, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Das System befinde sich im thermischen Gleichgewicht bei Temperatur τ . Berechnen Sie den Erwartungswert der Teilchendichte $n = N/V$.

[P12] Zwei-Level Fermionen

Gegeben sei ein System unabhängiger, nicht unterscheidbarer Teilchen, bei dem jedes der Teilchen sich in einem von zwei Zuständen befinden kann. Einer der Zustände habe Energie 0, der andere Energie ϵ . Das System befinde sich im thermischen und diffusiven Gleichgewicht bei Temperatur τ und chemischem Potential μ . Das System habe weiter die Eigenschaft, dass keine zwei Teilchen denselben Zustand besetzen können.

- (a) Zeigen Sie, dass die großkanonische Zustandssumme

$$\mathcal{Z} = (1 + \lambda)(1 + \lambda e^{-\epsilon/\tau}) \quad (2)$$

mit $\lambda = e^{\mu/\tau}$ ist.

- (b) Zeigen Sie durch Summation der Gibbs-Faktoren, dass für den Erwartungswert $\langle N \rangle$ der Teilchenzahl gilt:

$$\langle N \rangle = \frac{\lambda(1 + e^{-\epsilon/\tau} + 2\lambda e^{-\epsilon/\tau})}{\mathcal{Z}}. \quad (3)$$

- (c) Zeigen Sie auf die gleiche Weise, dass für den Erwartungswert der Energie U gilt

$$U = \frac{\epsilon\lambda}{e^{\epsilon/\tau} + \lambda}. \quad (4)$$

- (d) Die Zustandssumme \mathcal{Z} hat die Form $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2$, mit $\mathcal{Z}_1 = 1 + \lambda$ und $\mathcal{Z}_2 = 1 + \lambda e^{-\epsilon/\tau}$. Dies legt die Identifikation zweier unabhängiger Systeme mit Zustandssummen \mathcal{Z}_i nahe. Welche Systeme sind dies?